Linear Confinement Systemを非線型項に持つ弱非線型拡散方程式系について (生物モデルの数学)

三村, 昌泰

数理解析研究所講究録
195巻 1973年 17-26

linear confinement system を非線型項に持つ弱非線型拡散方程式系について

甲南大 理　三村昌泰

§1. 序

化学反応論，生態学，狭い意味での物性論において，さまざまな現象を記述している数学モデルの中で次の形で表わされる偏微分方程式系が数多くある：

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i - d_i \Delta u_i - (V_i \cdot \nabla) u_i = f_i(U) \qquad (1.1)$$

$$i = \{1, 2, \cdots, m\} \equiv <1, m>,$$

ただし，$U(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \cdots, u_m(t,x))^t$ は $(t,x) \in [0, +\infty) \times R_n$ において定義された実ベクトル函数である。[(*)] $d_i \geqq 0$ と $V_i = (v_i^1, v_i^2, \cdots, v_i^n)$ はそれぞれ，定数と定数ベクトルである。$F(U) = (f_1(U), f_2(U), \cdots, f_m(U))^t$。

(*) 今後，系(1.1)を我々は弱非線型縮退拡散方程式系と呼ぶことにする。

(1.1)の簡単なモデルは固体と液体間の1つの化学反応を記述する式として

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 - u_1 u_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \qquad - u_1 u_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial u_3}{\partial t} = \qquad u_1 u_2
\end{cases}
\qquad (1.2)
$$

がある。（この種のモデルは immobilizing chemical reactión と呼ばれる）あるいは，ボルツマン方程式の離散近似式として有名なカルレマン方程式系

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = u_2^2 - u_1^2 \\[2ex]
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = u_1^2 - u_2^2
\end{cases}
\qquad (1.3)
$$

がある。

これらの系に対して，初期条件

$$u_i(0, x) = u_{io}(x) \qquad x \in R_n \qquad (1.4)$$

をつけ加え，$(t, x) \in [0, +\infty) \times R_n$ において初期値問題を考えるならば，簡単な計算によって

"　$0 \leqq u_{io}(x) \leq M$　ならば　$0 \leq u_i(t, x) \leq M$　が

任意の $(t,x)\in[0,+\infty)\times R_n$ に対して従う ことがわかるであろう。 ここで M は適当な正定数である。

化学反応論，生態学上に表われる数学モデルの中にはこのような性質（ある種のアプリオリ評価）をもつものは少くない。 そこで，この結果を拡張することによって，我々は次のような問題を考える。すなわち， R_m の1つの部分集合 K_m に対して，初期値 $U_0(x)$ が任意の $x\in R_n$ に対して K_m に属するならば，(1.1) の解 $U(t,x)$ も又，任意の $(t,x)\in[0,+\infty)\times R_n$ に対して K_m に属するような性質をもつためには、$F(U)$ にいかなる条件が満たされていれば良いか？

この問題に対して我々はすでにいくつかの結果を示してきたが、ここではそれらを統合した上で，特に K_m が linear hyper surface で囲まれた集合について報告したい。

§2 linear confinement system（C-L 系）

§1 で与えた問題の一部分を答えるために、confinement system という概念を $F(U)$ に導入する。

<u>定義</u>　もしも $U=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^t$ に対して

$$K_m=\{\,U\mid U\in R_m \text{ and } P_\alpha(B_\alpha^\gamma)P_\alpha(U)^t\le C_\alpha^\gamma$$

$$\text{for} \quad \alpha \in \langle 1, A \rangle \quad \text{and} \quad \gamma \in \langle 1, \Gamma(\alpha) \rangle \}$$

に対して,

$$P_\alpha(B_\alpha^\gamma) \cdot P_\alpha(F(U))^t \leqq \{ c_\alpha^\gamma - P_\alpha(B_\alpha^\gamma) \cdot P_\alpha(U)^t \} s_\alpha^\gamma(U)$$

が成立するような非負の函数 $s_\alpha^\gamma(U)$ が存在するならば, $F(U)$ は $U \in K_m$ に関して L-C 系であるという。ただし, $\alpha \in \langle 1, A \rangle$, $\gamma \in \langle 1, \Gamma(\alpha) \rangle$ に対して

$$P_\alpha(U) = (u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \cdots, u_{\alpha_{\nabla(\alpha)}})$$

$$B_\alpha^\gamma = (b_{\alpha 1}^\gamma, b_{\alpha 2}^\gamma, \cdots, b_{\alpha m}^\gamma) \quad ; \text{const.}$$

$$c_\alpha^\gamma \quad ; \text{const.}$$

とする。

<u>例題1.</u> 次の2変数の系を考えよう。

$$\begin{cases} f_1(U) = -u_1 u_2 \\ f_2(U) = u_1 u_2 \end{cases} \qquad (2.1)$$

この時、K_2 を

$$K_2=\{(u_1,u_2)\mid 0\le u_1,\ 0\le u_2 \text{ and } u_1+u_2\le c^*,$$

$$c^*;\text{任意の正定数}\}$$

で定義すれば，系(2.1) は $U\in K_2$ に関して L−C 系 であることは容易にわかる。

例題 2.　次の 4 変数の系を考えよう。

$$\begin{cases} f_1(U) = -u_1u_2-u_1u_3 \\ f_2(U) = -u_2u_4+u_1u_3 \\ f_3(U) = u_2u_4-u_1u_3 \\ f_4(U) = -u_1u_4-u_2u_4 \end{cases} \qquad (2.2)$$

系(2.2) に対して,

$$A_2=2,\quad \gamma(1)=\gamma(2)=3,$$

$$P_1(U)=(u_1,u_2),\quad P_2(U)=(u_3,u_4)$$

$$B_1^1=B_2^1=(-1,0),\quad B_1^2=B_2^2=(0,1) \qquad (2.3)$$

$$B_1^3=B_2^3=(1,1),$$

$$C_1^1 = C_1^2 = C_2^1 = C_2^2 = 0, \quad C_1^3 = C_1^*, \quad C_2^3 = C_2^*$$

と$\{P_\alpha(U),\ B_\alpha^\gamma$ and $C_\alpha^\gamma\}$を定義する，ただし C_1^*，C_2^* はともに任意の正定数とする。 この時，R_4の部分集合K_4を

$$K_4 = \{U \mid U \in R_4 \text{ and } P_\alpha(B_\alpha^\gamma) \cdot P_\alpha(U)^t \leq C_\alpha^\gamma \text{ for } \alpha \in \langle 1.2 \rangle \text{ and } \gamma \in \langle 1,3 \rangle\} \tag{2.4}$$

と定義すれば，$\{S_\alpha^\gamma(U)\}$ を

$$\begin{aligned} &S_1^1(U) = d_1 u_4 + d_2 u_3, \quad S_1^2(U) = u_4 \\ &S_1^3(U) = 0, \quad S_2^1(U) = u_1 \\ &S_2^2(U) = u_1 + u_2, \quad S_2^3(U) = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

とおくならば，系(2.2) は $U \in K_4$ に関して L−C 系となる。

注意 1.　$F(U)$ に対して，K_m は必ずしも一意でない。例えば，系(2.2) は

$$K_4^m = \{U \mid u_i \geqq 0 \text{ for } i \in \langle 1.4 \rangle \text{ and } \sum_{j=1}^{4} u_j \leq C^*\}$$

に属する U に関しても L−C 系となる。

§3　一様有界性

ここでは、方程式系(1,1)に適当な仮定を置くことによって初期値問題(1,1),(1.2)の解の一様有界性が成立することを示す。

仮定.1

$$d_{\alpha_1} = d_{\alpha_2} = \cdots = d_{\alpha_{\nabla(\alpha)}} = d_\alpha$$

$$V_{\alpha_1} = V_{\alpha_2} = \cdots = V_{\alpha_{\nabla(\alpha)}} = V_\alpha$$

ただし，$\alpha \in \langle 1, A \rangle$ に対して d_α は正定数，$V_\alpha = (v_\alpha^1, v_\alpha^2, \cdots v_\alpha^n)$ は定数ベクトルとする。

定理.1　系(1.1)に対して次の2つの仮定を置く。

(i)　$F(U)$ は $U \in K_m$ に関して L−C系である。

(ii)　d_i と V_i は仮定.1を満たす。

この時、もしも初期値 $U_0(x)$ が $x \in R_n$ に対して K_m に属するならば、初期値問題(1.1),(1.2)の解 $U(t,x)$ も又 $(t,x) \in [0,+\infty) \times R_n$ に対して K_m に属する。

(証明)　参照[ ]。

§ 4. 応用例

4.1. 神経の興奮伝導を表わす Hodgkin-Huxley 方程式。

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_2^3 u_3 (u_1 - c_1^*) - u_4^4 (u_1 - c_2^*) - (u_1 - c_3^*) \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= g_2(u_1) u_2 + f_2(u_1)(1 - u_2) \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} &= g_3(u_1) u_3 + f_3(u_1)(1 - u_3) \\
\frac{\partial u_4}{\partial t} &= g_4(u_1) u_4 + f_4(u_1)(1 - u_4)
\end{aligned}
\right. \tag{4.1}
$$
。

ただし，c_1^*，c_2^*，c_3^* はすべて $c_1^* < c_2^* < c_3^*$ を満たす定数である。$g_i(u_1)$ と $f_i(u_1)$ は非正と非負の函数である。この時，系 (4.1) は

$$
K_4 = \{\, U \mid U \in R_4,\ c_1^* \leqq u_1 \leqq c_3^* \text{ and } \quad \leqq u_i \leqq 1 \text{ for } i \in \langle 2.4 \rangle \,\}
$$

に属する K_4 に関して C−L 系となる。

4.2. ある種の抗原抗体反応

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - d_1 u_1 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - d_3 u_2 u_4 + d_2 u_1 u_3 \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} &= d_3 u_2 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\
\frac{\partial u_4}{\partial t} &= - d_1 u_1 u_4 - d_3 u_2 u_4
\end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

ただし、d_1, d_2, d_3 は非負定数とする。　この時、系(4.2) は

$$K_4 = \{ U \mid U \in R_4,\ u_i \geq 0 \text{ for } i \in \langle 1.4 \rangle,$$
$$u_1 + u_2 \leq a_1^* \text{ and } u_3 + u_4 \leq a_2^* \}$$

に属するUに関してC−L系となる。ただし a_1^*, a_2^* は任意正定数とする。

4.3　離散速度状態をもつボルツマン方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (V_i \cdot \nabla) u_i = \sum_j^m \sum_l^m b_{jl}^i u_j u_l \tag{4.3}$$

ここで $\{b_{jl}^i\}$ はすべて定数で、次の性質をみたす。

$$b^i_{j\ell} = b^i_{\ell j},$$

$$b^i_{j\ell} \geqq 0 \quad \text{for } j \neq i \text{ and } \ell \neq i,$$

$$\sum_i^m b^i_{j\ell} = 0,$$

$$\sum_{\substack{j \in J_i \\ j \neq i}} \left(2 b^i_{ji} + \sum_{\substack{\ell \\ \ell \neq i}}^m b^i_{\ell j} \right) \leqq - b^i_{ii}$$

ただし　J_i は次式で定義される

$$J_i = \left\{ j \mid j \in \langle 1, m \rangle \text{ and } 2b^i_{ji} + \sum_{\substack{\ell \\ \ell \neq i}}^m b^i_{\ell j} \geqq 0 \right\}.$$

この時　系(4.3) は

$$K_m = \left\{ U \mid U \in R_m, \text{ and } 0 \leq u_i \leq c \text{ for } i \in \langle 1, m \rangle \right\}$$

に属する U に関して　C－L 系となる。

参考文献

三村昌泰；　京都大学工学部提出学位請求論文（1973）